SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. BOVE

IL PROBLEMA MISTO PER OPERATORI ELLITTICI DEL SECONDO ORDINE

18 MARZO 1982

Il problema misto per operatori ellittici è stato trattato da molti autori; per una bibliografia abbastanza completa e aggiornata fino al 1978 rimandiamo a [1] e [2]. Dopo tale data segnaliamo una serie di lavori di A. Pryde (si veda ad es. [5] e la bibliografia ivi contenuta), in cui si danno condizioni necessarie e sufficienti di fredholmicità per tali problemi in spazi del tipo di Beppo Levi.

La presente introduzione è ispirata a [1], [3] e [4].

1. PROBLEMA MISTO PER OPERATORI ELLITTICI A COEFFICIENTI COSTANTI

Sia dato il problema

$$(1.1)\quad \begin{cases} \Delta u - u = 0, \text{ in } R^n_+, \\ D_n u|x_n = g_1, \text{se } x_{n-1} > 0, \\ u|x_n = 0 = g_2, \text{se } x_{n-1} < 0. \end{cases}$$

dove g_1 e g_2 sono distribuzioni assegnate.

Per risolvere (1.1) consideriamo il seguente problema di Dirichlet:

$$(1.2)\quad \begin{cases} \Delta u - u = 0, \quad \text{in } R^n_+, \\ u|_{x_n=0} = \phi \end{cases}$$

dove ϕ è una opportuna distribuzione. La soluzione di (1.2) è data da

$$(1.3)\qquad u(x) = \int e^{ix'\cdot\xi'}\, e^{x_n\sqrt{1+|\xi'|^2}}\, \hat{\phi}(\xi')\, d\xi'$$

($x' = (x_1,\dots,x_{n-1}) = (x'',x_{n-1})$, $d\xi' = (2\pi)^{-n+1}\, d\xi'$ e ^ denota la trasformata di Fourier). Considerando ϕ come incognita imponiamo che (1.3) soddisfi le condizioni al contorno di (1.1); otteniamo

$$(1.4)_+\qquad \int e^{ix'\cdot\xi'}\,(i\sqrt{1+|\xi'|^2})\,\hat{\phi}(\xi')\, d\xi' = g_1(x'),\ \text{se } x_{n-1} > 0,$$

$$(1.4)_-\qquad \phi(x') = g_2(x')\quad ,\quad \text{se } x_{n-1} < 0.$$

Indichiamo con lg_1 e lg_2 due prolungamenti di g_1 e g_2 rispettivamente. Poniamo

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \phi_-(x') = lg_1(x') - i\sqrt{1+|D'|^2}\,\phi(x') \\ \\ \phi_+(x') = lg_2(x') - \phi(x') \end{cases}$$

Per definizione supp $\phi_\mp \subset \overline{R^n_\mp}$; prendendo la trasformata di Fourier di (1.5) otteniamo

$$(1.6)\qquad \begin{cases} i\sqrt{1+|\xi'|^2}\,\hat{\phi}(\xi') + \hat{\phi}_-(\xi') = \widehat{lg_1}(\xi') \\ \\ \hat{\phi}(\xi') + \hat{\phi}_+(\xi') = \widehat{lg_2}(\xi') \end{cases}$$

Osserviamo che, per definizione, $\hat{\phi}_-(\xi')$ è prolungabile analiticamente rispetto a ξ_{n-1} nel semipiano Im $\xi_{n-1} > 0$, mentre $\hat{\phi}_+(\xi')$ è prolungabile analiticamente nel semipiano Im $\xi_{n-1} < 0$. Da (1.6), eliminando $\hat{\phi}$, ricaviamo

$$(1.7)\qquad i\sqrt{1+|\xi'|^2}\,\hat{\phi}_+(\xi') - \hat{\phi}_-(\xi') = i\sqrt{1+|\xi'|^2}\,\widehat{lg_2}(\xi') - \widehat{lg_1}(\xi').$$

Ora

$$(1.8)\qquad i\sqrt{1+|\xi'|^2} = i(\xi_{n-1} - i(1+|\xi''|^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot\ (\xi_{n-1} + i(1+|\xi''|^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = b_-(\xi')\ b_+(\xi'),$$

ove $b_\pm$ è il simbolo d'un operatore pseudodifferenziale prolungabile analiticamente nel semipiano $\pm\ \mathrm{Im}\ \xi_{n-1} > 0$ (si è p. es. scelta quella determinazione della radice che è positiva sulla semiretta positiva).

Da (1.8) ricaviamo

$$(1.9)\qquad b_-(\xi')\ \hat{\phi}_+(\xi') - \frac{\hat{\phi}_-(\xi')}{b_+(\xi')} = b_-(\xi')\ \widehat{lg_2}(\xi') - \frac{\widehat{lg_1}(\xi')}{b_+(\xi')}\ .$$

Dunque il problema (1.1) è ricondotto a risolvere il problema (di Hilbert) (1.9). E' ben noto che tale problema è sempre univocamente risolubile in termini di spazi di Sobolev se il secondo membro sta in $H_\delta(R^{n-1})$, con $|\delta| < \frac{1}{2}$. Supponiamo di cercare una soluzione u di (1.1) in $H_s(R^n_+)$ $(s > 3/2)$; allora $\phi_- \in H^{s-3/2}(R^{n-1})$, $\phi_+ \in H^{s-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$, mentre il primo (secondo) membro della (1.9) sarebbe un elemento di $H^{s-1}(R^{n-1})$. Dunque la richiesta $s > 3/2$ non è compatibile con la condizione $|s - 1| < \frac{1}{2}$, ossia $\frac{1}{2} < s < 3/2$.

Definiamo ora gli spazi in cui, nel caso generale, si va a risolvere il problema misto; per comodità e per ragioni che verranno chiare più oltre, consideriamo il caso in cui sia l'operatore in esame, sia gli spazi dipendono da un parametro complesso q. Si intenderà che tutte le costanti che interverranno saranno indipendenti dal parametro q, amenoché non venga esplicitamente stabilito il contrario.

Definizione 1.1. Sia $q \in C \setminus \{0\}$, $s,l,\alpha,\beta \in R$. Allora

$u \in H_{s,-1,1}(R^n)$ se e solo se

$$[u]^2_{s,-1,1} = \int (|q|^2 + |\xi|^2)^s \, (|q|^2 + |\xi'|^2)^{-1}$$

$$(|q|^2 + |\xi''|^2)^1 \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty .$$

Inoltre $g \in H_{\alpha,\beta}(R^{n-1})$ se e solo se

$$[g]^2_{\alpha,\beta} = \int (|q|^2 + |\xi'|^2)^\alpha \, (|q|^2 + |\xi''|^2)^\beta \, |\hat{g}(\xi')|^2 \, d\xi' < +\infty .$$

Gli spazi $H_{s,-1,1}(R^n_+)$, $H_{\alpha,\beta}(R^{n-1}_\pm)$ si definiscono per passaggio al quoziente, come al solito.

Osserviamo che $H_s \subset H_{s,-1,1}$ e che, poiché

$$(|q|^2 + |\xi|^2)^s \left(\frac{|q|^2 + |\xi''|^2}{|q|^2 + |\xi'|^2}\right)^1 \geq |q|^2 + |\xi''|^{2s} + |\xi_{n-1}|^{2(s-1)} + |\xi_n|^{2(s-1)},$$

se s e 1 sono interi $u \in H_{s,-1,1}(R^n) \Rightarrow u \in L^2$, $D^s_{x''} u \in L^2$, D^{s-1}_{n-1} u e $D^{s-1}_n u \in L^2$. Ciò mira a dar conto del fatto che (p. es. nel problema (1.1)) la regolarità della soluzione viene a mancare nella direzione x_n e nella direzione x_{n-1} (direzione di attraversamento della superficie di discontinuità $x_n = x_{n-1} = 0$). Le principali proprietà di questi spazi sono elencate nella

<u>Proposizione 1.2</u>. i) Sia $s > \frac{1}{2}$, $u \in H_{s,-1,1}(R^n)$, γ_0 l'operatore di traccia nell'iperpiano $x_n = 0$; allora

$$[\gamma_0 \, u]_{s-1-\frac{1}{2},1} \leq C \, [u]_{s,-1,1} .$$

ii) Sia $\phi \in C^\infty_0(R^n)$, allora

$$[\phi u]_{s,-1,l} \leq \max_{x \in R^n} |\phi(x)| \, [u]_{s,-1,l} + C_\phi \, [u]_{s,-1,l-1} \, .$$

iii) Se P è un operatore differenziale di ordine m, allora

$$[Pu]_{s-m,-1,l} \leq C[u]_{s,-1,l} \, .$$

Consideriamo ora, per $q \quad \{z \quad C; \, |\arg z| < \pi/4\}$ il seguente problema al contorno:

$$(1.10) \qquad \begin{cases} A(q,D_x)\, u = f, & \text{in } R^n_+ \, , \\ B_1(q,D_x)\, u|_{x_n=0} = g_1, & \text{in } R^{n-1}_+ \, , \\ B_2(q,D_x)\, u|_{x_n=0} = g_2, & \text{in } R^{n-1}_- \, , \end{cases}$$

dove $A(q,\xi)$ è un polinomio propriamente ellittico omogeneo del secondo ordine rispetto alle variabili (q,ξ), $B_i(q,\xi)$ è un polinomio omogeneo di ordine m_i rispetto a (q,ξ), $i = 1,2$.

Premettiamo alcuni fatti. Denotiamo con π^+ l'operatore definito da $\pi^+ \hat{u} = \hat{v}$ se $v = H(x_n)u$, ove $H(x_n)$ è la funzione di Heaviside. Si ha

$$\pi^+ \hat{u}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{\xi_n + i\,0 - \eta_n} \, \hat{u}(\xi',\eta_n) \, d\eta_n \, .$$

Indichiamo con π' l'operatore definito da

$$\pi'(\hat{u}(\xi)) = \hat{v}(\xi') \, , \qquad \text{ove} \quad v(x') = \gamma_0(u(x)).$$

Supponiamo in un primo tempo $f \equiv 0$ in (1.10). Sia lg_i un prolungamento di g_i a tutto R^{n-1}, $i = 1,2$. Poniamo

$$(1.11)\quad \begin{cases} B_1(q,D_x)\, u|_{x_n=0} = 1g_1(x') + v_-(q,x') \\ B_2(q,d_x)\, u|_{x_n=0} = 1g_2(x') + v_+(q,x'). \end{cases}$$

Prendendo la trasformata di Fourier di (1.10) e (1.11) otteniamo

$$(1.12)\quad \begin{cases} \pi^+ A(q,\xi)\, \hat{u}(\xi) = 0 \\ \pi'\, \pi^+ B_1(q,\xi)\, \hat{u}(\xi) = \widehat{1g_1}(\xi') + \hat{v}_-(q,\xi') \\ \pi'\, \pi^+ B_2(q,\xi)\, \hat{u}(\xi) = \widehat{1g_2}(\xi') + \hat{v}_+(q,\xi'). \end{cases}$$

<u>Definizione 1.3</u>. Sia $A(q,\xi)$ un simbolo omogeneo tale che $A(q,\xi) \neq 0$ se $|q| + |\xi| \neq 0$. Diciamo che $A(q,\xi)$ ammette la fattorizzazione omogenea $A(q,\xi) = A_+(q,\xi)\, A_-(q,\xi)$, se A_+ e A_- verificano le

a) $A_\pm$ ammette prolungamento analitico nel semipiano $\pm \operatorname{Im} \xi_n > 0$.

b) $A_\pm$ è una funzione continua di $(q, \xi', \operatorname{Re} \xi_n, \operatorname{Im} \xi_n)$ per $\pm \operatorname{Im} \xi_n \geqq 0$, se $|q| + |\xi'| + |\operatorname{Re} \xi_n| + |\operatorname{Im} \xi_n| > 0$.

c) $A_\pm (q, \xi', \operatorname{Re} \xi_n, \operatorname{Im} \xi_n) \neq 0$ se $|q| + |\xi'| + |\operatorname{Re} \xi_n| + |\operatorname{Im} \xi_n| > 0$, per $\pm \operatorname{Im} \xi_n \geqq 0$.

d) $A_\pm$ è una funzione omogenea di $(q, \xi', \operatorname{Re} \xi_n, \operatorname{Im} \xi_n)$.

Si ha il

<u>Teorema 1.4</u>. Sia $A(q,\xi)$ come nella Def. 1.3; allora A ammette una fattorizzazione omogenea.

Dunque

$A(q,\xi) = A_+(q,\xi)\, A_-(q,\xi)$,

con ord $A_\pm = 1$. Dalla prima di (1.12) si ottiene che

$$(1.13) \qquad \hat{u}(\xi) = A_+^-(q,\xi)\ \phi(q,\xi').$$

Sostituendo nella seconda e terza equazione di (1.12) si ha

$$(1.14) \qquad \begin{cases} b_1(q,\xi')\ \phi(q,\xi') = \widehat{1g_1}(\xi') + \hat{v}_-(q,\xi') \\ b_2(q,\xi')\ \phi(q,\xi') = \widehat{1g_2}(\xi') + \hat{v}_+(q,\xi'), \end{cases}$$

ove $b_i(q,\xi') = \pi'\ \pi^+ \dfrac{B_i(q,\xi)}{A_+(q,\xi)}$.

Facciamo ora la seguente

<u>Ipotesi</u> (condizione di Šapiro-Lopatinskii)

$b_i(q,\xi') \neq 0 \quad \forall\, \xi' \in R^n,\ q \in \{z \in C;\ |\arg z| < \pi/4\}$,

$|\xi'| + |q| \neq 0, \quad i = 1,2.$

Per il Teor. 1.4 si ha

$$(1.15) \qquad b_i(q,\xi') = b_i^+(q,\xi')\ b_i^-(q,\xi'),\ i = 1,2.$$

Sia $\varkappa_1 = \text{ord } b_1^-$, $\varkappa_2 = \text{ord } b_2^+$, $\varkappa = x_1 + x_2$; $\varkappa$ viene detto "indice della fattorizzazione".

Eliminando ϕ dalla (1.14) otteniamo il problema

$$(1.16) \qquad b_2^+(b_1^+)^{-1}\ \hat{v}_- - b_1^-(b_2^-)^{-1}\ \hat{v}_+ = b_1^-(b_2^-)^{-1}\ \widehat{1g_2} - b_2^+(b_1^+)^{-1}\ \widehat{1g_1}.$$

Ora se $g_1 \in H_{s-l-m_1-\frac{1}{2},l}(R^{n-1}_+)$, $g_2 \in H_{s-l-m_2-\frac{1}{2},l}(R^{n-1}_-)$, il secondo membro della (1.16) sta in $H_{s-l-\frac{1}{2}-x,l}(R^{n-1})$; dunque (1.16) ammette una soluzione unica per ogni termine noto se s e l sono tali che

1) $s > \max\{m_1 + \frac{1}{2},\ m_2 + \frac{1}{2}\}$

2) $|s-l-\frac{1}{2}-\varkappa| = |\delta| < \frac{1}{2}$.

Da (1.16) si ricava allora che

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{A_+ b_2^+ b_1^-}\left(\pi^- \frac{b_1^-}{b_2^-}\,\widehat{lg_2} - \pi^+ \frac{b_2^+}{b_1^+}\,\widehat{lg_1}\right). \tag{1.17}$$

Utilizzando la (1.17) è facile provare che valgono le stime

$$[u]_{s,-l,l} \leq C([g_1]_{s-l-m_1-\frac{1}{2},l} + [g_2]_{s-l-m_2-\frac{1}{2},l}).$$

Se ora si considera (1.10) nel caso in cui $f \not\equiv 0$ e $f \in H_{s-2,-l,l}(R^n_+)$, basta porre $u = u_o + w$. Se

$$u_o(x) = \quad e^{ix\cdot\xi}\, A_+^{-1}(q,\xi)\, \pi^+(A_-^{-1}(q,\xi)\, \widehat{lf}(\xi))\, d\xi$$

(lf è un prolungamento di f a tutto R^n, $lf \in H_{s-2,-l,l}(R^n)$), si ottiene che w è soluzione d'un problema di cui $f \equiv 0$; per w valgono quindi formule del tipo (1.17). Si è così provato il seguente

<u>Teorema 1.5</u>. Sia A un operatore ellittico nel senso della Def. 1.3; sia soddisfatta la condizione di Sapiro-Lopatinskii. Allora $\forall f \in H_{s-2,-l,l}(R^n_+)$, $g_1 \in H_{s-m_1-l-\frac{1}{2},l}(R^{n-1}_+)$, $g_2 \in H_{s-m_2-l-\frac{1}{2},l}(R^{n-1}_-)$, purché s,l siano tali che $s > \max\{m_1 + \frac{1}{2}, m_2 + \frac{1}{2}\}$, $|s-l-\frac{1}{2}-\varkappa| < \frac{1}{2}$, esiste una e una sola soluzione del problema (1.10) e inoltre si ha

$$[u]_{s,-l,l} \leq C([f]_{s-2,-l,l} + [g_1]_{s-l-m_1-\frac{1}{2},l} + [g_2]_{s-l-m_2-\frac{1}{2},l}). \tag{1.18}$$

2. IL CASO DEI COEFFICIENTI VARIABILI IN UN APERTO LIMITATO

Sia Ω un aperto limitato di R^n con frontiera regolare Γ; supponiamo cioè Γ una varietà C^∞ $(n-1)$-dimensionale tale che Ω stia sempre localmente da una sola parte di Γ. Sia $\{V_j;\ j = 1,\dots,m\}$ un ricoprimento aperto di $\overline{\Omega}$ in R^n e sia $\{\phi_j;\ j = 1,\dots,m\}$ una partizione dell'unità di classe C_0^∞ subordinata a quel ricoprimento. Sia $U_j = \operatorname{supp} \phi_j$, $j = 1,\dots,m$. Ancora sia ω una sottovarietà di codimensione 1 di Γ, di classe C^∞, che divide Γ in due parti, Γ^+ e Γ^-, tali che $\omega = \overline{\Gamma^+} \cap \overline{\Gamma^-}$. Sia W un intorno aperto di ω in $\overline{\Omega}$.

Introduciamo in U_j un sistema locale di coordinate che soddisfi le seguenti condizioni:

a) Se $U_j \cap \Gamma = \emptyset$ il sistema di coordinate è quello naturale;

b) Sia $U_j \cap \Gamma \neq \emptyset$; non è restrittivo supporre che U_j sia interamente contenuto in qualche V_k; scegliamo allora un sistema di coordinate h_j tale che $h_j(U_j \cap \Gamma) = R^{n-1} \times \{0\}$ e che conservi la distanza da Γ;

c) Sia $U_j \cap \omega \neq \emptyset$; allora dovrà valere la richiesta in b) e in più dovrà essere $h_j(U_j \cap \omega) = R^{n-2} \times \{0,0)\}$ e h_j dovrà conservare la distanza da ω lungo Γ.

Siano ora $s, l: \overline{\Omega} \to R$ funzioni continue. Scegliamo $x_j \in U_j$ in modo tale che

d) se $U_j \cap \Gamma \neq \emptyset$, allora $x_j \in \Gamma$;

e) se $U_j \cap \omega \neq \emptyset$, allora $x_j \in \omega$;

f) se $U_j \not\subset W$, ma $U_j \cap W \neq \emptyset$, allora $x_j \in W$.

Poniamo $s_j = s(x_j)$, $l_j = l(x_j)$.

Diremo che $u \in H_{(s,-l,l)}(\Omega)$ se

$$[u]^2_{(s,-l,l)} = \sum_{j=1}^{m} [(\phi_j\, u) \circ h_j^{-1}]^2_{s_j,-l_j,l_j} < +\infty ,$$

dove le norme a secondo membro si intendono prese su R^n o R^n_+ a seconda

che supp $\phi_j \cap \Gamma$ sia vuoto o no. In modo analogo si introducono gli spazi di bordo $H_{\alpha,\beta}(\Gamma^{\pm})$.

<u>Osservazione</u>. La regolarità variabile di questo tipo di spazi serve a dar conto del fatto che, lontano da ω, la soluzione è regolare se i dati sono regolari, mentre, vicino a ω, non si può ottenere più di una certa regolarità.

Consideriamo ora il problema

$$(2.1)\qquad \begin{cases} A(x,q,D_x)\, u = f\ , & \text{in } \Omega\ , \\ B_1(x,q,D_x)\, u|_\Gamma = g_1\ , & \text{in } \Gamma^+\ , \\ B_2(x,q,D_x)\, u|_\Gamma = g_2\ , & \text{in } \Gamma^-\ , \end{cases}$$

dove A, B_i sono operatori differenziali di ordine 2, m_i, rispettivamente, $i = 1,2$, con coefficienti di classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. Supponiamo che

$$(2.2)\qquad \overset{\circ}{A}(x,q,\xi) \neq 0 \qquad \forall x,q,\xi \quad \text{tali che } |q| + |\xi| > 0.$$

($\overset{\circ}{A}$ denota la parte principale di A).

(2.3) In ciascun sistema locale di coordinate

$$b_i(x,q,\xi') = \pi'\, \pi^+ \frac{\overset{\circ}{B}_i(x,q,\xi)}{\overset{\circ}{A}_+(x,q,\xi)} \neq 0\ , \quad \text{per } x \in \Gamma\ ,$$

$\xi \in R^n$, $|q| + |\xi'| > 0$, ove $\overset{\circ}{A} = A_+\, A_-$ è la fattorizzazione omogenea di $\overset{\circ}{A}$.

Per (2.3), $\forall x \in \Gamma$ fissato si ha

$$(2.4)\qquad b_i(x,q,\xi') = b_i^+(x,q,\xi')\, b_i^-(x,q,\xi')\ , \quad i = 1,2.$$

Poniamo $\varkappa_1(x) = \text{ord } b_1^-(x,\cdot,\cdot)$, $\varkappa_2(x) = \text{ord } b_2^+(x,\cdot,\cdot)$ $\varkappa(x) = \varkappa_1(x) + \varkappa_2(x)$. Per [6] si hà che $\varkappa(x)$ è continua in x. Sia $\varkappa_0$ una funzione continua tale che

$$\sup_{x \in \omega} |\varkappa_0(x) - \varkappa(x)| < \tfrac{1}{2}.$$

Poniamo $\varkappa_0(x) = \varkappa(x) + \delta(x)$, con $|\delta(x)| < \frac{1}{2}$. Siano $s,l\colon \overline{\Omega} \to R$, $l \geqq 0$ funzioni continue tali che

$$s(x) = \varkappa_0(x) + l(x) + \tfrac{1}{2} \geqq \max\{m_1 + \tfrac{1}{2}, m_2 + \tfrac{1}{2}\} . \tag{2.5}$$

Facciamo ora la seguente ipotesi

$$|s_j - s_k| < 1/4 , \quad |l_j - l_k| < 1/4 , \qquad j,k = 1,\dots,m. \tag{2.6}$$

Si ha il

Teorema 2.1. Valgano le ipotesi (2.2) e (2.3) e siano le funzioni s,l definite da (2.5). Allora esiste $q_0 > 0$ tale che se $f \in H_{(s-2,-l,l)}(\Omega)$, $g_1 \in H_{(s-l-m_1-\frac{1}{2},l)}(\Gamma^+)$, $g_2 \in H_{(s-l-m_2-\frac{1}{2},l)}(\Gamma^-)$, il problema (2.1) ammette una unica soluzione $u \in H_{(s,-l,l)}(\overline{\Omega})$ purché $|q| > q_0$. Inoltre vale la stima a priori

$$[u]_{(s,-l,l)} \leqq C([f]_{(s-2,-l,l)} + [g_1]_{(s-l-m_1-\frac{1}{2},l)} + [g_2]_{(s-l-m_2-\frac{1}{2},l)}) . \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Sia $\psi_j \in C_0^\infty(R^n)$ tale che $\psi_j(x) \equiv 1$ in un intorno

di U_j, sicché $\psi_j\ \phi_j = \phi_j$, e tale che se $U_k \cap U_j \neq \emptyset$ allora $\psi_j\ \phi_k = \phi_k$. Proviamo la (2.7). Sia j tale che $U_j \cap \omega \neq \emptyset$. Dalla prima delle (2.1) abbiamo che $\phi_j\ A\ \psi_j\ u = \phi_j\ f$. Se il supporto di ψ_j è sufficientemente piccolo, esiste un operatore differenziale A_j, definito in tutto R^n, tale che $\phi_j\ A\ \psi_j\ u = \phi_j\ A_j\ \psi_j\ u$, e i suoi coefficienti varino di poco; infatti se $c \in C_o^\infty(R^n)$ e $c\ \psi_j = \psi_j$, $0 \leq c \leq 1$, basta porre $A_j(x,q,D_x) = c(x)\ A(x,q,D_x) + (1 - c(x))\ A(x_j,q,D_x)$. Possiamo inoltre supporre che, nel nostro sistema di coordinate locali, $x_j = 0$. Si ha

$$A_j\ \phi_j\ u = \phi_j\ A_j\ \psi_j\ u + A_{1j}\ \psi_j\ u\ ,$$

dove ord $A_{1j} \leq 1$. Da ciò

$$A_j\ \phi_j\ u = \phi_j\ f + A_{1j}\ \psi_j\ u\ .$$

Dunque

$$\overset{o}{A}_j(o,q,D_x)\ \phi_j\ u = \phi_j\ f + A_{1j}\ \psi_j\ u + (\overset{o}{A}_j(x,q,D_x) - A_j(x,q,D_x)\ \phi_j\ u$$
$$+ (\overset{o}{A}_j(o,q,D_x) - \overset{o}{A}_j(x,q,D_x))\ \phi_j\ u\ ,$$

ossia

$$\overset{o}{A}_j(o,q,D_x)\ \phi_j\ u = \phi_j\ f + A_{1j}\ \psi_j\ u + A_{2j}\ \phi_j\ u + A_{3j}\ \phi_j\ u = \Phi_j\ , \tag{2.8}$$

dove ord $A_{2j} \leq 1$ e l'operatore A_{3j} ha coefficienti "piccoli".

Analogamente

$$\overset{o}{B}_{1j}(o,q,D_x)\ \phi_j\ u|_{x_n=0} = (\phi_j\ g_1 + Q_{1j}\ \psi_j\ u + Q_{2j}\ \phi_j\ u + Q_{3j}\ \phi_j\ u)|_{x_n=0} = \Psi_{1j} \tag{2.9}$$

$$(2.10) \qquad \overset{\circ}{B}_{2j}(o,q,D_x)\, \phi_j\, u|_{x_n=0} = (\phi_j\, g_2 + P_{1j}\, \psi_j\, u + P_{2j}\, \phi_j\, u + P_{3j}\, \phi_j\, u)|_{x_n=0} = \Psi_{2j}$$

dove ord Q_{1j} = ord $Q_{2j} = m_1 - 1$, ord P_{1j} = ord $P_{2j} = m_2 - 1$ e Q_{3j} e P_{3j} hanno coefficienti "piccoli". Per (2.8)-(2.10) abbiamo la stima

$$(2.11) \qquad [\phi_j\, u]_{s_j,-1_j,1_j} \leq C([\Phi_j]_{s_j-2,-1_j,1_j} + [\Psi_{1j}]_{s_j-1_j-m_1-\frac{1}{2},1_j} + [\Psi_{2j}]_{s_j-1_j-m_2-\frac{1}{2},1_j}) .$$

Ora si ha

$$[\Phi_j]_{s_j-2,-1_j,1_j} \leq C([\phi_j\, f]_{s_j-2,-1_j,1_j} + [\psi_j\, u]_{s_j-1,-1_j,1_j} + [\phi_j\, u]_{s_j-1,-1_j,1_j} + \varepsilon[\phi_j[u]_{s_j,-1_j,1_j} + [\phi_j\, u]_{s_j,-1_j,1_j-1}) \leq$$

$$\leq C([\phi_j\, f]_{s_j-2,-1_j,1_j} + [\psi_j\, u]_{s_j-1,-1_j,1_j} + (\varepsilon + \frac{1}{|q|})\, [\phi_j\, u]_{s_j,-1_j,1_j}) ,$$

purché il supporto di ψ_j sia sufficientemente piccolo. Ora

$$[\psi_j\, u]_{s_j-1,-1_j,1_j} \leq \sum_{k=1}^{m} [\phi_k\, \psi_j\, u]_{s_j-1,-1_j,1_j} .$$

Supponiamo k tale che $V_j \cap U_k \neq \emptyset$. Sia $s_j = s_k + \delta$, $1_j = 1_k + \delta'$, ove $\max\{|\delta|, |\delta'|\} < 1/4$, per la (2.6). Se $\delta' > 0$, si ha

$$[\phi_k \psi_j u]_{s_j-1,-1_j,1_j} = [\phi_k \psi_j u]_{s_k-1+\delta,-1_k-\delta',1_k+\delta'} \leq$$

$$\leq [\phi_k \psi_j u]_{s_k-1+\delta,-1_k,1_k} \leq \frac{C}{|q|^{1-\delta}} [\phi_k u]_{s_k,-1_k,1_k} .$$

Se $\delta' < 0$, si ha

$$[\phi_k \psi_j u]_{s_j-1,-1_j,1_j} = [\phi_k \psi_j u]_{s_k-1+\delta,-1_k-\delta',1_k+\delta'} \leq$$

$$\leq [\phi_k \psi_j u]_{s_k-1+\delta,-1_k-\delta',1_k} \leq [\phi_k \psi_j u]_{s_k-1+\delta-\delta',-1_k,1_k} \leq$$

$$\leq \frac{C}{|q|^{1-\delta+\delta'}} [\phi_k u]_{s_k,-1_k,1_k} .$$

Dunque

$$[\Phi_j]_{s_j-2,-1_j,1_j} \leq C([\phi_j f]_{s_j-2,-1_j,1_j} + \frac{1}{|q|^{\alpha}} \sum_{k=1}^{m} [\phi_k u]_{s_k,-1_k,1_k} +$$

$$+ (\varepsilon + \frac{1}{|q|}) [\phi_j u]_{s_j,-1_j,1_j}) \quad (\alpha > 0) .$$

Analoghe stime si ottengono per Ψ_{1j}, Ψ_{2j}. Sommando in j si ottiene la (2.7), purché la partizione dell'unità sia sufficientemente fine e q abbastanza grande.

Proviamo ora l'esistenza d'una soluzione. Denotiamo con A l'operatore costituito dai primi membri delle equazioni in (2.1). Conveniamo di denotare con ϕ A l'operatore che otteniamo

i) moltiplicando per ϕ l'equazione differenziale in (2.1),

ii) moltiplicando per γ_0 ϕ le condizioni al contorno in (2.1).

Consideriamo l'operatore ψ_j A ϕ_j e scriviamolo nelle coordina-

te locali di U_j: $\psi'_j\, A'\, \phi'_j$. Sia $\overset{\circ}{A}'$ la parte principale di A_j si ha

$$\psi'_j\, A'\, \phi'_j = \phi'_j(\overset{\circ}{A}'(o) + K'_j + T'_j)\, \phi'_j ,$$

dove $\overset{\circ}{A}'(o)$ è $\overset{\circ}{A}'$ con i coefficienti congelati nell'origine, $K'_j = \psi'_j(\overset{\circ}{A}' - \overset{\circ}{A}'(o))$, $T'_j = \psi'_j(A' - \overset{\circ}{A}')$. Osserviamo che $\overset{\circ}{A}'(o)$ è a coefficienti costanti, mentre K'_j, T'_j possono essere pensati come operatori definiti su R^n. Per quanto si è provato al § 1, $\overset{\circ}{A}'(o)$ ha un inverso R'_{oj}; se q è abbastanza grande e supp ϕ_j abbastanza piccolo possiamo far sì che $\| K'_j \| \leq$ $\leq (2 \| R'_{oj} \|)^{-1}$, dove $\| \cdot \|$ denota la norma degli operatori tra gli spazi in cui operano. Allora $I + K'_j R'_{oj}$ ha inverso. Se $R'_j = R'_{oj}(I + K'_j R'_{oj})^{-1}$, R'_j è l'inverso di $\overset{\circ}{A}'(o) + K'_j$. Sia $A'_j = \overset{\circ}{A}'(o) + K'_j + T'_j$; si ha

$$R'_j A'_j = I + R'_j T'_j \ , \quad A'_j R'_j = I + T'_j R'_j \ .$$

Denotiamo con R_j l'operatore ottenuto scrivendo $\psi'_j\, R'_j\, \phi'_j$ nelle variabili originali. Poniamo $R = \sum_{j=1}^{m} \psi_j\, R_j\, \phi_j$. Proviamo che, se $|q|$ è grande, $R\, A$ ha un inverso. Infatti nel j-esimo sistema locale di coordinate otteniamo

$$\psi'_j\, R'_j\, \phi'_j\, A'\, \psi'_j = \psi'_j\, R'_j\, A'_j\, \phi'_j + \psi'_j\, R'_j\, \left[\phi'_j, A'_j\right] \psi'_j =$$

$$= \phi'_j\, I + \psi'_j\, M'_j\, \psi'_j \ ,$$

ove M'_j è un operatore di ordine -1. Dunque

$$R\, A\, u = u + \sum_{j=1}^{m} \psi_j\, M_j\, \psi_j\, u \ .$$

Ora, se $|q|$ è grande, la norma di quest'ultimo operatore è piccola, quindi $R\, A$ ha inverso $(R\, A)^{-1}$, sicché $(R\, A)^{-1}\, R$ è un inverso a si-

nistra di A. Analogamente si prova che A R ha inverso. Ciò fornisce l'esi_
stenza d'una soluzione.

L'unicità segue da (2.7).

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ESKIN: Boundary value problems for elliptic pseudodifferential operators, Nauka, Mosca, 1973.

[2] ————: General mixed boundary problems for elliptic differential equations, 33-72, in CIME, Bressanone, 16/6-24/6. 1977.

[3] A.G. GJUL'MISARJAN: General discontinuous boundary value problems... Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 2 (1967), 218-234.

[4] ————: On general discontinuous boundary value problems... Izv. Akad. nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 5 (1970), 3-31.

[5] A.J. PRYDE: Second order elliptic equations with mixed boundary conditions, preprint.

[6] M.J. VISIK, G.J. ESKIN: Equations in convolution is a bounded region. Uspchi Mat. Nauk, 20 (3) (1965), 89-152.